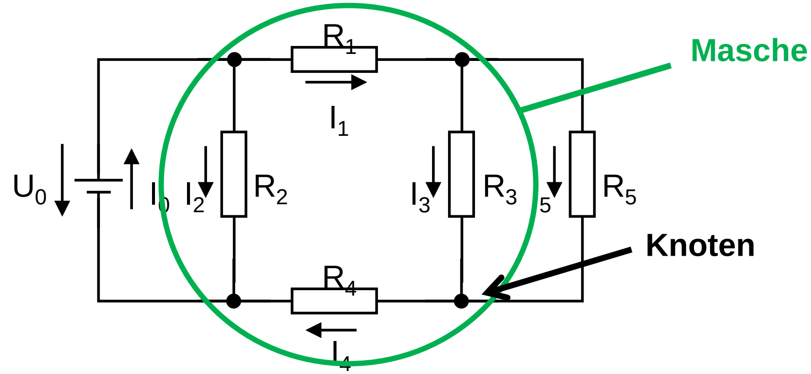
MAR Plus in der Elektrotechnik

1. Grundlagen der Elektrizitätslehre
2. Elektrischer Netzplan
3. Lösung des elektrischen Netzplans
4. Lösung mit MAR Plus

Grundlagen der Elektrizitätslehre



Ohmsches Gesetz

Die Stromstärke verhält sich proportional zur Spannung und umgekehrt proportional zum Widerstand:

$$I[A] = \frac{U[V]}{R[\Omega]}$$

1. Kirchhoffsches Gesetz (Knotensatz)

Die Summe aller in einem Verzweigungspunkt (Knoten) zu- und abfließenden Ströme ist gleich Null:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$

Aus der Knotenregel kann man den Gesamtwiderstand R_{ges} einer Parallelschaltung von M Widerständen herleiten:

$$\frac{1}{R_{Ges}} = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{R_k}$$

2. Kirchhoffsches Gesetz (Maschensatz)

Die Summe aller Spannungen innerhalb eines geschlossenen Stromkreises (Masche) ist gleich Null:

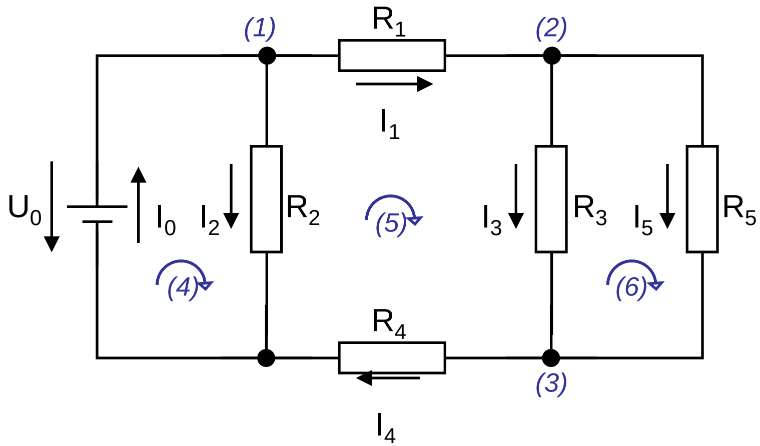
$$\sum_{j=1}^{m} U_j = 0$$

Aus der Maschenregel kann man den Gesamtwiderstand R_{ges} einer Reihenschaltung von M Widerständen herleiten:

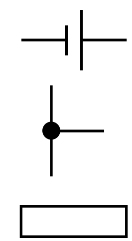
$$R_{Ges} = \sum_{k=1}^{M} R_k$$

Elektrischer Netzplan

Die grafische Darstellung der Abhängigkeiten von elektrischen Bauelementen geschieht in einem Netzplan:



$R_1 = 120\ \Omega$
$R_2 = 284\ \Omega$
$R_3 = 100\ \Omega$
$R_4 = 20\ \Omega$
$R_5 = 60\ \Omega$
$U_0 = 142\ \text{V}$



Lineare quadratische Gleichungssysteme treten häufig in Aufgabenstellungen der Technik, Wirtschaft und des Finanzwesens auf.

Eine wichtige Anwendung ist die Beschreibung elektrischer Netzpläne in der Elektrotechnik.

Die mathematische Beschreibung von Netzplänen geschieht durch lineare quadratische Gleichungssysteme mit Hilfe der Gesetze von Ohm und Kirchhoff:

$$\left.\begin{array}{llllllll}
(Gl.1) & I_0 & -I_1 & -I_2 & & & & = 0 \\
(Gl.2) & & I_1 & & -I_3 & & -I_5 & = 0 \\
(Gl.3) & & & & I_3 & -I_4 & +I_5 & = 0
\end{array}\right\}\ \text{Knotensatz}$$

$$\left.\begin{array}{llllllll}
(Gl.4) & & & R_2 I_2 & & & & = U_0 \\
(Gl.5) & & R_1 I_1 & -R_2 I_2 & +R_3 I_3 & +R_4 I_4 & & = 0 \\
(Gl.6) & & & & -R_3 I_3 & & +R_5 I_5 & = 0
\end{array}\right\}\ \text{Maschensatz}$$

Ohmsches Gesetz: U = R I

Kirchhoff'sche Gesetze:

Knotensatz: $I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_N = 0$

Maschensatz: $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_N = 0$

Das elektrische Netzwerk dieses Beispiels ist bewußt einfach gehalten, um die prinzipielle Anwendung zu zeigen.

Lösung des elektrischen Netzplans

Für die Lösung des linearen quadratischen Gleichungssystems wird die Matrizenschreibweise verwendet:

$[A_{i,j}]\ \{x_i\} = \{b_i\}$

Lösungsvektor

$$[A_{i,j}]\ \{x_i\} = \{b_i\}$$

Vektor der Absolutglieder

Reguläre Koeffizientenmatrix

Durch Einsetzen der Werte unseres Beispiels erhält man folgendes lineares Gleichungssystems mit den Stromstärken als Lösungsvektor:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 284 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & -284 & 100 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & 60 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 142 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Das Gleichungssystem wird so umorganisiert, dass kein Diagonalterm der Koeffizientenmatrix Null ist.

Die Reihenfolge der Gleichungen ist nun:
(1) – (2) – (4) – (5) – (3) – (6)

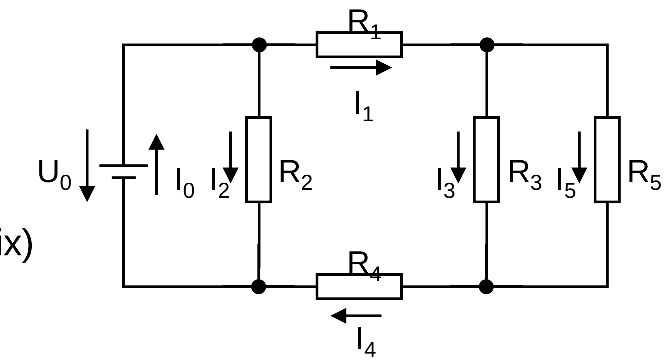
Die Werte der einzelnen Stromstärken I_i, für die alle Gleichungen erfüllt sind, sind die Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$I_i = \{1.3; 0.8; 0.5; 0.3; 0.8; 0.5\}$ für i = 0, 1, ... 5

Ein lineares Gleichungssystem kann
• keine Lösung
• eine Lösung
• unendlich viele Lösungen
haben.

Lösung mit MAR Plus

Das Vorgehen in MAR Plus ist denkbar einfach:



1. Eingabe der Anzahl der Gleichungen
2. Eingabe der Koeffizientenmatrix und der Absolutglieder (erweiterte Matrix)
3. Anklicken der Schaltfläche „Rechne!“

Lineares Gleichungssystem

Speichern Laden Smartrechner Dezimalstelle Hilfe Zurück MAR beenden

Anzahl der Gleichungen eingeben: 6 (1)

Faktor für Matrix A: 1.0

Gradmaß | Bogenmaß | Rechne! (3)

	1	2	3	4	5	6	bi	
1	1	-1	-1	0	0	0	0	1
2	0	1	0	-1	0	-1	0	2
3	0	0	284	0	0	0	142	3
4	0	120	-284	100	20	0	0	4
5	0	0	0	1	-1	1	0	5
6	0	0	0	-100	0	60	0	6

(2)

Das Ergebnis sind die Werte der einzelnen Stromstärken im Netzplan:

Ergebnismatrix (Lineares Gle...

Vari.	Ergebnisse:
x 1	1.3
x 2	.8
x 3	.5
x 4	.3
x 5	.8
x 6	.5

$$= \begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{Bmatrix}$$